ENS PARIS M2

Groupe C/S

SECONDE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations et rappels

On note Id_X l'application identité d'un ensemble X dans lui-même.

Si f et g sont deux applications d'un ensemble X vers un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{R}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad (*)$$

et

$$\begin{array}{rccc} \lambda \cdot f: & X & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x). \end{array} \qquad (**)$$

Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\| \quad \|$, on note Aut (E) l'ensemble des bijections linéaires continues $T : E \longrightarrow E$ telles que T^{-1} soit continu et l'on note Isom (E) l'ensemble des $T \in$ Aut (E) tels que, pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\| = \|x\|.$$

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées 2×2 à coefficients réels. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $M_2(\mathbb{R})$, on note encore A l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax+by,\ cx+dy). \end{array}$$

On note $M_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices dans $M_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ et l'on pose :

$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ M \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det M \in \{1, -1\} \right\}.$$

On note $H(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ qui possèdent deux valeurs propres réelles λ et μ telles que

$$|\lambda| < 1 < |\mu|$$

et l'on pose :

$$H(\mathbb{Z}) = H(\mathbb{R}) \cap GL_2(\mathbb{Z}).$$

Tournez la page S.V.P.

ENS PARIS C/S MP

On note $C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 : \mathbb{R}^2)$ (respectivement $C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 : \mathbb{R}^2)$) l'ensemble des applications f continues (respectivement. de classe C^1) de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (a, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad f(a + n) = f(a).$$

Munis des opérations d'addition et de multiplication par les scalaires définies par (*) et (**). $C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 ; \mathbb{R}^2)$ et $C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 : \mathbb{R}^2)$ sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$. On définit une norme $\| \quad \|_{C^1}$ sur $C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 ; \mathbb{R}^2)$ en posant. pour toute application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\longmapsto \left(f_1(a), f_2(a)\right) \end{aligned}$$

dans $C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 ; \mathbb{R}^2)$:

$$\| f \|_{C^1} = \sup_{x \in [0,1]^2} \max \left(|f_1(a)|, |f_2(a)|, \left|\frac{\partial f_1}{\partial x}(a)\right|, \left|\frac{\partial f_2}{\partial x}(a)\right|, \left|\frac{\partial f_1}{\partial y}(a)\right|, \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}(a)\right| \right).$$

I

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, muni d'une norme $\| \quad \|$ qui en fait un espace vectoriel normé complet.

I.1. Si f est une application de E vers E, on définit sa constante de Lipschitz comme l'élément suivant de $\mathbb{R}_+ \cup \{ + \infty \}$:

$$\operatorname{Lip} f = \sup_{\substack{(x,y) \in E^2 \\ x \neq y}} \frac{\| f(x) - f(y) \|}{\| x - y \|}.$$

Montrer que, pour tout $T \in \operatorname{Aut}(E)$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute application $f : E \longrightarrow E$ satisfaisant à

$$\operatorname{Lip} f < \varepsilon,$$

l'équation d'inconnue $v \in E$

$$T(v) + f(v) = 0$$

possède une unique solution.

I.2. Quel est l'ensemble $\mathcal{S}$ des réels λ tels que, pour tout élément T de Isom (E), $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$ appartienne à Aut (E) ?

I.3. Soit F l'espace vectoriel $E \times E$.

a. Vérifier que l'on définit une norme $\| \quad \|_F$ sur F en posant, pour tout $(u, v) \in E \times E$,

$$\| (u, v) \|_F = \max (\| u \|, \| v \|),$$

et que, muni de $\| \quad \|_F$, F est un espace vectoriel normé complet.

b. Montrer que, pour tout élément

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de H ($\mathbb{R}$) et tout élément S de Isom (E), l'application linéaire

$$\begin{aligned} U : \quad F &\longrightarrow F \\ (u, v) &\longmapsto (S(u) - au - bv, \ S(v) - cu - dv) \end{aligned}$$

appartient à Aut (F) et que la norme de U^{-1} possède un majorant ne dépendant que de M.

ENS PARIS C/S M2

II

Soit $\mathscr{Z}$ l'ensemble des bijections $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telles que f et f^{-1} soient de classe C^1 et que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \qquad f(z_1) - f(z_2) \in \mathbb{Z}^2 \iff z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}^2 .$$

II.1. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{Z}$, il existe un unique élément M de $M_2(\mathbb{Z})$ tel que, pour tout $(z, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}^2$, on ait

$$f(z + m) = f(z) + M(m).$$

Montrer, en outre, que $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ et qu'il existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$f = M + \varphi .$$

II.2. Soit $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété suivante soit vraie :

Pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\| \varphi \|_{C^1} < \eta ,$$

on a :

i. $A + \varphi \in \mathscr{Z}$;

ii. $(A + \varphi)^{-1} - A^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$;

iii. $\| (A + \varphi)^{-1} - A^{-1} \|_{C^1} < \varepsilon$.

III

On pose, pour tout $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ et tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathscr{V}_A(\varepsilon) = \left\{ f \in \mathscr{Z} \mid f - A \in C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \| f - A \|_{C^1} < \varepsilon \right\}.$$

On désigne par $\mathscr{T}$ l'ensemble des homéomorphismes $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tels que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ appartienne à $C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$.

III.1. Montrer que $H(\mathbb{Z})$ n'est pas vide.

III.2. Soit $A \in H(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété suivante soit vraie :

Pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\| \varphi \|_{C^1} < \varepsilon ,$$

il existe $\psi \in C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$(A + \varphi) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + \psi) = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + \psi) \circ A .$$

(On pourra commencer par étudier l'application linéaire

$$\begin{aligned} T\colon \quad C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2) &\longrightarrow C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ A - A \circ \psi \ ). \end{aligned}$$

III.3. Soit $A \in H(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété suivante soit vraie :

Pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\| \varphi \|_{C^1} < \varepsilon ,$$

il existe $\psi' \in C^0(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + \psi') \circ (A + \varphi) = A \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + \psi') .$$

Tournez la page S.V.P.

ENS PARIS C/S M2

III.4. Soit $A \in H(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété suivante soit vraie :

Pour tout $f \in \mathcal{V}_A(\varepsilon)$, il existe $h \in \mathcal{T}$ tel que

$$h^{-1} \circ f \circ h = A .$$

III.5. Peut-on généraliser le résultat du III.4. en affaiblissant l'hypothèse sur f? Peut-on établir un énoncé analogue où $\mathcal{T}$ est remplacé par $\mathcal{Q}$?

IV

On note $\equiv$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$z_1 \equiv z_2 \iff z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}^2 ,$$

on note $\mathbb{T}^2$ l'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{R}^2 / \equiv$, et l'on note $[z]$ la classe dans $\mathbb{T}^2$ d'un élément $z \in \mathbb{R}^2$.

Si $f \in \mathcal{Q} \cup M_2(\mathbb{Z})$, pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, l'élément $[f(z)]$ de $\mathbb{T}^2$ ne dépend que de $[z]$ et sera notée $f([z])$.

Soit $g \in \mathcal{Q}$ et soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des itérés de g, définie par la récurrence suivante :

$$g_1 = g ;$$
$$g_{n+1} = g \circ g_n .$$

On dit que g possède une fonction zêta lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$F_n = \{ t \in \mathbb{T}^2 \mid g_n(t) = t \}$$

est fini : on note alors $N_n(g)$ son cardinal ;

ii. le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(g)}{n} z^n$$

est strictement positif.

On pose alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,

$$\zeta_g(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(g)}{n} z^n \right).$$

IV.1. Soit $M \in M_2(\mathbb{Z})$.

a. Montrer qu'il existe A dans $GL_2(\mathbb{Z})$ et p, q et r dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$AM = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que si $\det M \neq 0$, alors

$$\{ t \in \mathbb{T}^2 \mid M(t) = [0] \}$$

est un ensemble fini de cardinal $|\det M|$.

IV.2. On se place dans la situation de III.4. Montrer que tout $f \in \mathcal{V}_A(\varepsilon)$ possède une fonction zêta. Comment ζ_f s'exprime-t-elle à partir de A ?